

### Capitolo III

## SISTEMI TERMODINAMICI APERTI

### 1 - GENERALITA'

Le notizie che nei paragrafi seguenti saranno fornite sul moto dei fluidi e sulla termodinamica dei sistemi aperti, hanno soprattutto lo scopo di mettere in grado di risolvere i problemi che si incontrano nello studio della Fisica Tecnica ed in particolare quelli del moto entro tubazioni o condotte percorse da acqua o da aria. Più che dare le risoluzioni particolari di tali problemi, le note seguenti tendono a stabilire in modo chiaro, seppur conciso e a volte non troppo rigoroso, le ipotesi e i fatti sperimentali che sono alla base delle equazioni generali.

Prima di trattare delle equazioni generali (conservazione della massa, conservazione dell'energia, equazione di Bernoulli) e della determinazione delle perdite di carico, si farà un breve cenno a una proprietà dei fluidi, la viscosità, che ha un particolare interesse in questo genere di problemi.

2 - **VISCOSITA'**

In un fluido ideale non possono trasmettersi sforzi di taglio: se si considera una superficie comunque orientata all'interno di un fluido, attraverso di essa si trasmetteranno solo sforzi normali.

I fluidi reali sono invece dotati di *viscosita'*, cioe' della proprieta' di poter trasmettere degli sforzi di taglio.

La natura e l'effetto della viscosita' vengono messe in evidenza dall'esame di vari fenomeni, quali ad esempio, quello dello scorrimento l'una rispetto all'altra di due lastre parallele separate da un fluido.

Sia *a* (fig. 1) la piastra ferma e *b* quella che si muove con velocita'  $u_0$ : nel moto risultante la distribuzione della velocita' e' lineare, con un gradiente trasversale  $du/dy$ .

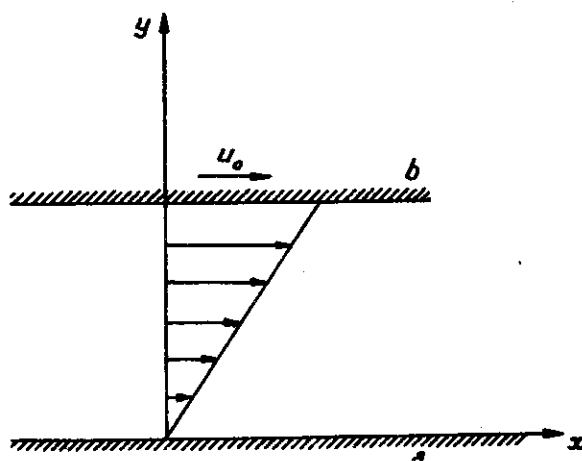


Fig. 1

Poiche' per mantenere in moto la piastra *b* e' necessario applicare ad essa una forza, vuol dire che in ogni sezione parallela al moto esistera' uno sforzo di taglio.

La legge di Newton dell'attrito dei fluidi ammette che lo sforzo di taglio  $\tau$  è proporzionale al gradiente di velocità.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

Il coefficiente di proporzionalità  $\mu$  prende il nome di viscosità dinamica o assoluta: i fluidi per i quali esso non dipende da  $\tau$  e  $du/dy$  ma soltanto dallo stato del corpo che si considera si chiamano newtoniani. La equazione (1) può essere considerata come una equazione di definizione della viscosità e tale definizione può essere estesa anche nel caso di un campo generale di velocità.

Le dimensioni della viscosità nel sistema assoluto (grandezze fondamentali: massa, lunghezza e tempo) sono:

$$[\mu] = [ML^{-1} T^{-1}]$$

e l'unità di misura comunemente adottata è quella del sistema c.g.s., ossia il g/(sec. cm), la quale prende il nome di *poise*<sup>(\*)</sup>.

In molte relazioni compare il rapporto  $\nu = \mu/\rho$  tra la viscosità e la densità, che prende il nome di viscosità cinematica e ha le dimensioni:

$$\nu = \mu/\rho = [L^2 T^{-1}]$$

L'unità di viscosità cinematica nel sistema cgs è quindi il  $cm^2/sec$  e prende il nome di *stokes*.

La viscosità può anche essere esaminata da un punto di vista microscopico. Per un gas si assume che la viscosità sia dovuta ad un trasporto di quantità di moto effettuato dalle molecole che attraversano una data sezione parallela al moto, am-

(\*) Adottando il sistema tecnico, nel quale si assume come grandezza fondamentale la forza (espressa in kg peso) in luogo della massa, le dimensioni di  $\mu$  sono  $[F L^{-2} T]$  e l'unità di misura è il  $kg \cdot sec/m^2$ . Tale unità tecnica risulta uguale a 98,1 poise.

mettendo che la loro velocità complessiva sia la risultante di una velocità molecolare (disordinata) e di quella macroscopica (ordinata). In un liquido la interpretazione microscopica non è più così semplice: si ammette alle volte che la viscosità sia dovuta alla somma di un termine che tiene conto del trasporto di quantità di moto più un termine che tiene conto delle forze intermolecolari che si esercitano direttamente tra le varie particelle.

I valori della viscosità ricavati da dati sperimentali o calcolati teoricamente, sono raccolti nei manuali in tabelle. Per poter estendere i risultati delle misure a casi non sperimentati si è cercato di trovare delle relazioni teoriche che permettessero mediante alcune costanti di porre in correlazione i dati disponibili.

Per quanto riguarda i gas, con il calcolo si sono finora ottenuti solo limitati successi: in ogni caso le formule sono state stabilite ricorrendo ad un particolare modello molecolare di gas.

Tra le varie relazioni teoriche si ricorda quella di Maxwell ottenuta assumendo le molecole infinitamente piccole, perfettamente elastiche e in assenza di campi di forza tra di esse (gas perfetti): si trova che la viscosità è indipendente dalla pressione e che cresce proporzionalmente a  $T^{1/2}$

$$\mu = K T^{1/2} \quad ; \quad \left( \frac{\delta \mu}{\delta p} \right)_T = 0$$

In ogni caso la viscosità nei gas è funzione crescente della temperatura.

Il contrario avviene nel caso dei liquidi per i quali la viscosità diminuisce con l'aumentare della temperatura.

Di questo comportamento si può dare una spiegazione con la interpretazione microscopica accennata, osservando che in un

gas l'aumento della temperatura provoca un aumento dei moti disordinati delle molecole e quindi un aumento del trasporto di q. di moto e in definitiva della viscosità.

In un liquido invece l'aumento della temperatura ha una forte influenza sui legami intermolecolari che vanno allentandosi, e che contribuiscono in modo predominante alla viscosità. In un gas quindi - in cui prevalgono gli effetti del moto molecolare su quelli delle forze intermolecolari - l'aumento della temperatura provoca un aumento della viscosità; in un liquido - in cui le forze di coesione sono di gran lunga più importanti degli effetti dei moti molecolari - l'aumento di temperatura provoca una diminuzione della viscosità.

Anche per i liquidi vi sono diversi metodi di interpolazione e estrapolazione per trovare la viscosità in funzione della temperatura da uno o più valori conosciuti, metodi basati in ogni caso su dati sperimentali.

Una relazione, della quale si può anche dare una interpretazione teorica è quella di Arrhenius

$$\mu = A e^{E/RT}$$

dove A dipende dal peso e dal volume molecolare ed è circa 0,0005 poise per molti liquidi non associati. Il valore di E è generalmente compreso tra 1/4 e 1/3 del calore latente di evaporazione, scendendo al 4-12% per i metalli liquidi.

### 3 - CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Lo studio del moto dei fluidi è stato affrontato in diversi modi, alcuni dei quali - cercando di seguire quello che avviene di un elemento di fluido o quello che accade in ogni punto nel tempo - richiedono sviluppi matematici di notevole ampiezza e complessità.

Dal nostro punto di vista sara' pero' sufficiente prendere in esame quelle equazioni generali che legano tra di loro le varie grandezze caratteristiche del fluido e gli scambi di energia con l'esterno.

Si fara' qui esclusivamente riferimento al moto stazionario, per il quale la portata in massa del fluido  $G$  in ogni data sezione e' indipendente dal tempo, e si ammettera' che non ci siano erogazioni o sottrazioni di fluido lungo il condotto; pertanto, per la legge della conservazione della materia si potra' scrivere che detta portata, uguale al prodotto della portata in volume  $V$  per la densita' media  $\bar{\rho}$ , e' costante, cioe' uguale ad un valore indipendente dal tempo e dalla particolare sezione:

$$G = \bar{\rho} V = \text{cost.} \quad (3)$$

Essendo, inoltre, la  $V$  eguale al prodotto della velocita' media  $\bar{u}$  in una data sezione per l'area  $S$  della sezione stessa, la (3) puo' essere scritta anche:

$$G = \bar{\rho} \bar{u} S = \frac{\bar{u} S}{\bar{v}} = \text{cost} \quad (3')$$

se  $\bar{v} = 1/\bar{\rho}$  e' il volume specifico medio. Le linee sopra i simboli  $u$ ,  $v$  e  $\rho$  stanno ad indicare che delle grandezze in questione va preso il valore medio nella sezione della vena, ossia  $\bar{u} = 1/s \int u \, dS$ , ad analogamente per  $\bar{v}$  e per  $\bar{\rho}$ .

#### 4 - CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

All'equazione che esprime la conservazione della massa, si aggiunge per lo studio del moto dei fluidi una equazione che esprime la conservazione dell'energia: questa equazione si ricava dando forma matematica al fatto che nel caso del moto sta-

zionario l'energia totale posseduta dal fluido in una qualsiasi sezione 2 della vena (fig. 2) e' uguale alla energia totale posseduta nella sezione 1 aumentata (naturalmente in senso algebrico) di quella ricevuta tra la sezione 1 e 2;

$$E_2 = E_1 + E_{1,2}$$

Considerando il moto della unita' di massa del fluido, cioe' facendo riferimento ad un intervallo di tempo per cui passa at-

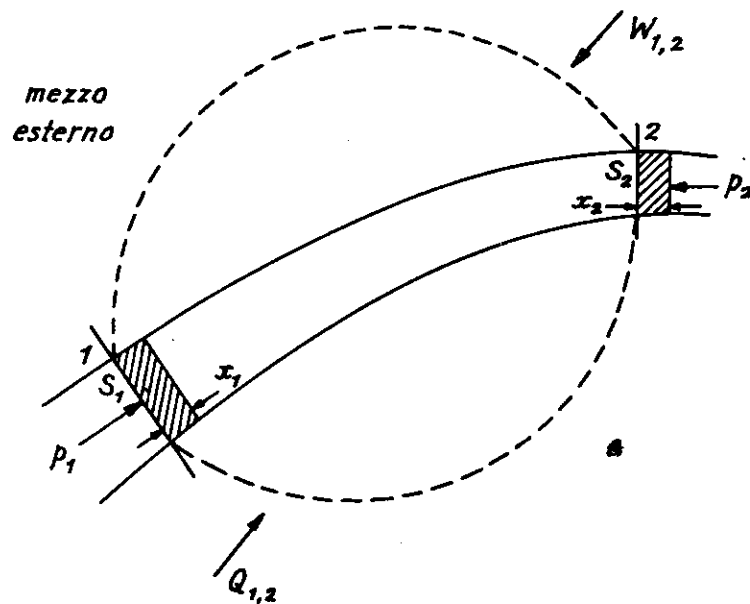


Fig. 2

traverso una sezione l'unita' di massa, si ammetta che il fluido possa possedere energia sotto forma di: energia potenziale, energia cinetica ed energia interna; per cui l'energia totale

nella sezione 1,  $E_1$ , posseduta da 1 kg (massa) del fluido sarà: (\*)

$$E_1 = gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + U_1$$

Analogamente nella sezione 2 si avrà:

$$E_2 = gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + U_2$$

In queste relazioni  $z$  è la quota del baricentro della sezione rispetto ad un qualsiasi piano orizzontale di riferimento.

Il termine  $E_{1,2}$  dovrà tener conto dell'energia che ha attraversato il sistema in esame: poiché il sistema è aperto (nel senso che in esso entra della massa nella sezione 1 e ne esce dalla sezione 2) si dovrà intanto valutare il lavoro che le pressioni  $p_1$  e  $p_2$  compiono per il moto di 1 kg. di fluido; questo lavoro sarà dato da:

$$p_1 S_1 x_1 - p_2 S_2 x_2$$

dove  $S_1 x_1$  e  $S_2 x_2$  sono i volumi occupati da 1 kg. di fluido che abbia rispettivamente la densità che gli compete nelle sezioni 1 e 2 e sono quindi rispettivamente uguali a  $v_1$

---

(\*) Si trascurerà ora e nel seguito il fattore correttivo per il quale andrebbe moltiplicato il quadrato della velocità media per ottenere l'energia cinetica.

La velocità media stessa sarà indicata con la lettera  $u$  non soprilineata.



e  $v_2$ .

Oltre a questo lavoro delle pressioni proprio dei sistemi aperti, nel termine  $E_{1,2}$  comparirà l'energia fornita al sistema dall'esterno sotto forma di calore e di lavoro meccanico (questo mediante un ventilatore, una pompa, una turbina, un compressore, ecc.).

Indicando con  $Q_{1,2}$  la q. di c. fornita dall'esterno e con  $W_{1,2}$  il lavoro meccanico fornito dall'esterno<sup>(\*)</sup>, ambedue intesi come somma algebrica tra quantità fornita dall'esterno e quantità cedute all'esterno, sempre riferiti ad 1 kg. di fluido sarà:

$$E_{1,2} = p_1 v_1 - p_2 v_2 + Q_{1,2} + W_{1,2}$$

dove si sono considerate positive le quantità di calore e il lavoro che il mezzo esterno trasmette al fluido e negative le quantità di calore e il lavoro che il mezzo esterno riceve dal fluido.

In definitiva l'equazione di bilancio energetico si scrive:

$$gz_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + U_2 = gz_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + U_1 + p_1 v_1 - p_2 v_2 +$$

$$+ Q_{1,2} + W_{1,2}$$

---

(\*) Si noterà che per il lavoro la convenzione è opposta a quella fatta, a suo tempo, negli sviluppi della termodinamica dei sistemi chiusi.

e raggruppando diversamente i termini:

$$g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) + (U_2 + p_2 v_2) - (U_1 + p_1 v_1) = Q_{1,2} + W_{1,2} \quad (4)$$

o introducendo la grandezza entalpia  $J = U + pv$ :

$$g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) + J_2 - J_1 = Q_{1,2} + W_{1,2} \quad (4')$$

Tutte le grandezze  $J$ ,  $Q$ ,  $W$  ecc. sono energia per unita' di massa per cui, adottando il sistema assoluto MKS, andranno espresse in joule/kg.

Si noti che nello stabilire la equazione (4) si e' considerato il calore come una forma di energia, cioe' si e' gia' fatto implicitamente uso del 1° principio della termodinamica. In effetti la (4) non e' che una espressione generalizzata del principio di conservazione dell'energia, valida per i sistemi stazionari aperti e nella quale si tiene anche conto delle forme di energia potenziale e cinetica. Proprio perche' la (4) e' una conseguenza del 1° principio - che riguarda gli scambi di calore di un sistema con l'esterno a prescindere dalla reversibilita' o meno delle trasformazioni - non compare in essa esplicitamente un termine che rappresenti la irreversibilita' del moto e delle trasformazioni: la irreversibilita' del moto si riflettera', a parita' di condizioni iniziali, sulle grandezze di stato termodinamiche finali, ed in particolare sul valore dell'entalpia  $J_2$ .

### 5. - EQUAZIONE DELLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA IN CASI PARTICOLARI.

E' utile osservare i risultati ai quali conduce la diretta applicazione della equazione della conservazione della energia in alcuni casi particolari, ma molto importanti.

A) Efflusso adiabatico in parete sottile. Si consideri (figura 3) l'efflusso in un fluido attraverso un foro praticato

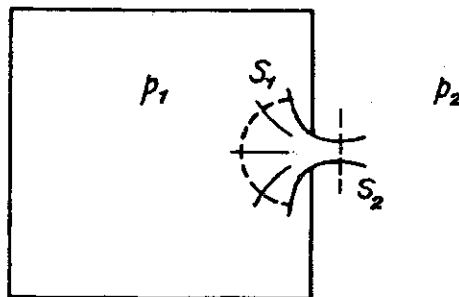


Fig. 3

nella parete sottile di un grande recipiente, essendo  $p_1$  la pressione nel recipiente, maggiore della  $p_2$  all'esterno. Si applichi la (4') tra la sezione 1 all'interno del recipiente abbastanza lontana dal foro in modo che  $u_1^2$  sia trascurabile rispetto a  $u_2^2$ , e la sezione 2 immediatamente dopo il foro. Se si suppone inoltre trascurabile la differenza di quota  $z_2 - z_1$  si ottiene:

$$u_2 = \sqrt{2(J_1 - J_2)}$$

relazione valida anche se non sono trascurabili le perdite per attrito (che naturalmente influiranno sul valore  $J_2$  della en-

talpia finale).

Se la parete è sufficientemente sottile in modo che siano piccoli gli attriti esterni, e se sono trascurabili anche quelli interni, alla relazione generale vista possono darsi due forme particolari, una per i liquidi ed una per i gas. In tale caso potendosi scrivere  $dU = dQ - p dv$  (\*), ed essendo  $dQ = 0$ , (efflusso adiabatico) si da  $dU = -p dv$ , e quindi

$$J_1 - J_2 = p_1 v_1 - p_2 v_2 + U_1 - U_2 = p_1 v_1 - p_2 v_2 - \int_2^1 p dv = \int_2^1 v dp$$

Per un liquido si potrà considerare costante il volume specifico, dato il piccolo valore del coefficiente di compressibilità, per cui

$$u_2 = \sqrt{2(J_1 - J_2)} = \sqrt{2 v (p_1 - p_2)}$$

Si noti che queste relazioni vengono comunemente scritte

$$u_2 = \sqrt{2g(J_1 - J_2)} = \sqrt{2 g v (p_1 - p_2)};$$

la diversità dipende dal fatto che in questo testo si è adottato come unità di forza quella del sistema MKS, cioè il newton, e non il kg peso.

Per un gas la:

$$u_2 = \sqrt{2(J_1 - J_2)} = \sqrt{2 \int_2^1 v dp}$$

---

(\*) Si osservi che il 1° principio può scriversi nella forma  $dU = dQ - p dv$  solo nel caso delle trasformazioni reversibili, poiché solo in tal caso il lavoro elementare coincide con  $p dv$ . Si osservi che con la convenzione qui fatta per il lavoro, che cioè sia positivo il lavoro fornito dall'esterno, è  $dW = -p dv$ .

potrà essere risolta solo se si conosce il legame tra  $v$  e  $p$  cioè se si conosce la trasformazione che avviene nel passaggio del gas tra la sezione 1 e la sezione 2.

Ammettendo che detta trasformazione sia una politropica, la quale è rappresentabile mediante una relazione del tipo

$$pv^m = \text{costante}$$

si ottiene:

$$u_2 = \sqrt{2 \int_2^1 v \, dp} = \sqrt{2 \frac{m}{m-1} \cdot p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]}$$

Con questa relazione si può calcolare la portata in massa nella sezione 2, ottenendo

$$G = \frac{u_2 S_2}{v_2} = \sqrt{2 \frac{m}{m-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{m}} \right]}$$

L'andamento di  $G$  in funzione di  $p_2$ , per  $p_1 = \text{costante}$ , è riportato in fig. 4. La  $G$  presenta un massimo per un valore di  $p_2$  dato da

$$p_2 = p_n = \left( \frac{2}{m+1} \right)^{\frac{m}{m+1}} p_1$$

che nel caso dell'efflusso adiabatico di un gas ideale diviene

$$p_n = 0,52 p_1$$

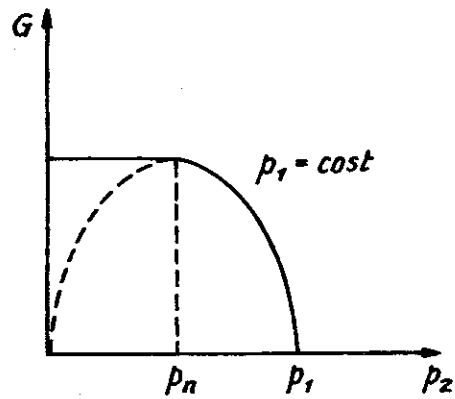


Fig. 4

In realtà la portata misurata sperimentalmente segue l'andamento teorico solo per  $p_n < p_2 < p_1$ . Per valori di  $p_2 < p_n$  essa si mantiene costante e le relazioni teoriche trovate non valgono più in quanto la vena fluida non rimane continua.

B) Efflusso attraverso un rubinetto. Si consideri (fig.5) il passaggio di un fluido da una pressione  $p_1$  alla pressione minore  $p_2$  attraverso un rubinetto.

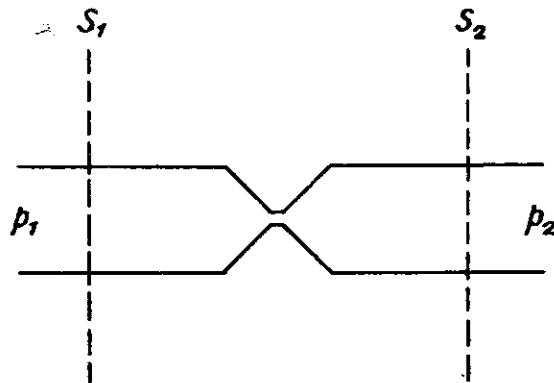


Fig. 5

Supponendo: che l'efflusso sia adiabatico, cioè nulli gli scambi di calore con l'esterno e quindi  $Q_{1,2} = 0$ ; che tra le due sezioni della vena vi sia solo il rubinetto e non una macchina capace di fornire o raccogliere lavoro, e quindi  $W_{1,2} = 0$ ; che sia trascurabile la differenza di quota  $z_2 - z_1$  tra i baricentri delle due sezioni e che sia anche trascurabile la differenza di energia cinetica tra la sezione 1 e 2(\*), dalla (4') risulta:

$$J_2 - J_1 = 0 \quad \text{cioe'} \quad J_1 = J_2$$

Nell'efflusso adiabatico, con tutte le ipotesi fatte, la entalpia nello stato finale è uguale all'entalpia nello stato iniziale.

Questo è ad esempio il tipo di efflusso che si verifica nel rubinetto delle macchine frigorifere.

Si osservi che se il fluido è un gas ideale, per il quale vale la  $dJ = \gamma_p dT$  la condizione  $J_2 = J_1$  conduce alla  $T_2 = T_1$ ; per un gas ideale l'efflusso oltre ad essere isentalpico è anche isotermico.

C) Lavoro in una macchina. L'equazione generale dell'energia si presta per ottenere una semplice espressione del lavoro compiuto in una macchina o da una macchina, nel caso che il fluido l'attraversi in moto stazionario (fig. 6).

---

(\*) Si osserverà che, tenendo conto della relazione (3') del par. 3 che esprime la conservazione della massa, quest'ultima ipotesi equivale ad ammettere che il rapporto  $S/v$  fra l'area  $S$  attraversata dalla corrente fluida e il volume specifico  $v$  abbia lo stesso valore nelle sezioni 1 e 2. Per un fluido incompressibile (liquido), questa condizione è soddisfatta se  $S_1 = S_2$ ; nel caso di un fluido compressibile (aeriforme), viceversa, le due aree dovrebbero stare nello stesso rapporto dei corrispondenti volumi specifici,

Supponendo che tra la macchina e l'esterno non vi siano scambi di calore, cioè  $Q_{1,2} = 0$  e che inoltre siano trascurabili  $z_2 - z_1$  e  $u_2^2 - u_1^2$  (\*) si ha:

$$W_{1,2} = J_2 - J_1$$

relazione valida, ripetiamo, per i sistemi aperti in moto stazionario e per trasformazioni adiabatiche del fluido. Come già accennato, la reversibilità o meno della trasformazione influirà nel valore finale  $J_2$  dell'entalpia.

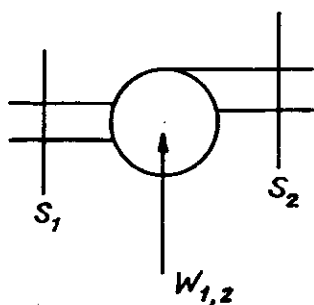


Fig. 6

Secondo le convenzioni fatte,  $W_{1,2}$  è positivo quando  $J_2$  è  $> J_1$ , cioè quando è il mezzo che compie lavoro sul fluido (pompa, compressore) ed è negativo quando  $J_1 > J_2$ , cioè quando è il fluido che fornisce lavoro al mezzo esterno (turbina ecc.).

## 6. EQUAZIONE DI BERNOULLI

Più comune nello studio del moto dei condotti è un'altra equazione che si ottiene applicando ad un fluido in moto in un

(\*) Si veda la nota relativa al precedente capo B).



condotta la equazione della meccanica,  $F = ma$ .

Per il moto stazionario lineare di un fluido ideale, l'applicazione della seconda legge della dinamica conduce alla relazione differenziale.

$$v dp + d \left( \frac{u^2}{2} \right) + g dz = 0$$

la cui forma integrale e':

$$\int_1^2 v dp + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (5)$$

che per un fluido incompressibile diviene:

$$v(p_2 - p_1) + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0$$

Questa equazione viene spesso anche scritta:

$$vp_1 + \frac{u_1^2}{2} + gz_1 = vp_2 + \frac{u_2^2}{2} + gz_2 \quad (6)$$

La somma di questi tre termini prende il nome di carico totale in una sezione e la (6) esprime il fatto che nel moto stazionario lineare di un fluido ideale il carico in ogni sezione rimane costante, cioe' non v'e' perdita di carico.

Quando peró si considera il moto reale irreversibile di un fluido reale la somma dei tre termini non e' piú la stessa in tutte le sezioni: la differenza tra il carico nella sezione 1 e quello nella sezione 2 viene chiamata perdita di carico ed indicata con R:

$$v(p_1 - p_2) + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) = R \quad (7)$$

Lo stesso concetto di perdita di carico può estendersi al moto di un fluido compressibile, per cui la (5) diviene:

$$\int_1^2 v \, dp + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + R = 0 \quad (8)$$

## 7. APPLICAZIONI DELL'EQUAZIONE DI BERNQUILLI

### A) Calcolo di un camino

Una interessante applicazione della (7) si ha nel calcolo di un camino. Si consideri il camino schematizzato come un condotto ripieno di un fluido a temperatura  $T_f$  costante lungo il condotto, le cui estremità, in comunicazione coll'atmosfera, abbiano un dislivello  $z_2 - z_1 = H$  altezza del camino (Fig.7). Sia  $T_a$  la temperatura dell'aria esterna al condotto. Consideriamo inoltre la sezione iniziale 1 della vena fluida un po' lontana dalla sezione di imbocco, in modo che  $u_1^2$  sia trascurabile rispetto a  $u_2^2$ .

La (7) potrà allora scriversi:

$$v_f(p_2 - p_1) + gH + \frac{u_2^2}{2} + R = 0$$

dove  $v_f$  è il volume specifico del fluido interno (prodotti della combustione) alla temperatura  $T_f$  e ad una pressione intermedia tra  $p_1$  e  $p_2$  e che supporremo costante dato il piccolo valore di  $p_2 - p_1$ . Si osservi che questa differenza di pressio-

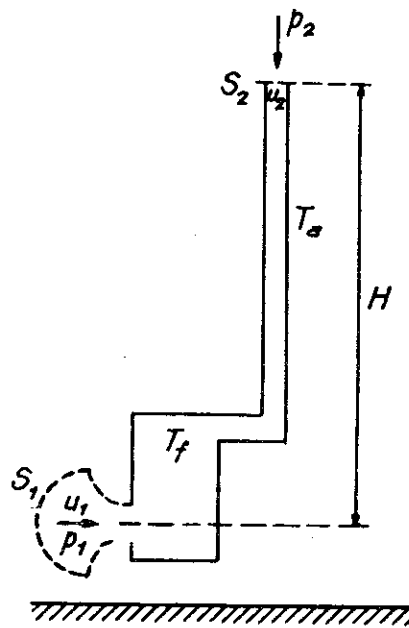


Fig. 7

ne è determinata dalle diverse quote delle sezioni 1 e 2: la pressione  $p_1$  sarà maggiore della  $p_2$  a causa del peso della colonna di aria di volume specifico  $v_a$  e altezza  $H$ .

Sarà pertanto

$$p_1 - p_2 = g \frac{H}{v_a}$$

$$gH - g \frac{v_f}{v_a} H + \frac{u_2^2}{2} + R = 0$$

Supponendo che nel caso di moto dei fumi in un camino il valore di  $R$  sia proporzionale a  $u_2^2$  (vedi paragrafi seguenti) e sostituendo ad  $u$  la sua espressione ricavabile dalla equazio-

ne di continuità:

$$u = \frac{V}{S}$$

dove  $V$  è la portata dei fumi in volume ed  $S$  la sezione del camino, si ottiene:

$$H \left( \frac{v_f}{v_a} - 1 \right) = \frac{u_2^2}{2g} (1 + r) \qquad H \left( \frac{v_f}{v_a} - 1 \right) = \frac{V^2}{2g S^2} (1 + r)$$

In questa relazione  $r$  è un numero adimensionale legato ad  $R$  dalla

$$R = \frac{u_2^2}{2} r$$

Osservando infine che il rapporto  $\frac{v_f}{v_a}$  è uguale a  $\frac{T_f}{T_a}$  si ha:

$$S = \sqrt{\frac{T_a}{T_f - T_a} \cdot \frac{1 + r}{2g}} \times \frac{V}{\sqrt{H}}$$

$$S = K \frac{V}{\sqrt{H}}$$

Nella realtà il termine  $K$  non si ricava con le relazioni viste, ma è stato determinato sperimentalmente per vari casi; il termine  $V$  potrà essere calcolato una volta conosciuto il peso di combustibile bruciato ogni ora, l'eccesso d'aria con il quale avviene la combustione e la temperatura media dei fumi.

### B) Calcolo della prevalenza di una pompa in circuiti aperti

Si consideri un impianto per il sollevamento di un liquido, schematizzato come in fig. 8 in cui

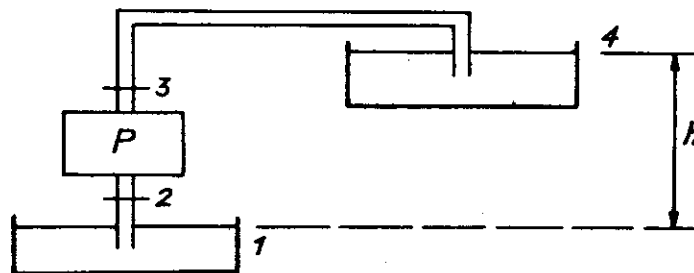


Fig. 8

$h$  sia il dislivello tra il serbatoio inferiore e quello superiore. Si voglia determinare la differenza di pressione che una pompa  $P$  deve generare per ottenere che nel condotto si abbia una portata  $G$ .

L'equazione di Bernoulli per i fluidi incompressibili applicata tra le sezioni 1 e 2, in cui la sezione 1 sia al livello del liquido nel serbatoio inferiore e la sezione 2 venga scelta immediatamente a monte della pompa, diventa:

$$v(p_2 - p_1) + \frac{u_2^2}{2} + g(z_2 - z_1) + R_{1,2} = 0$$

avendo ammesso  $u_1 = 0$ .

Scrivendo ancora l'equazione di Bernoulli tra le sezioni 3 e 4; in cui la sezione 3 sia scelta immediatamente a valle della pompa e la 4 a livello del serbatoio superiore, si ha:

$$v(p_4 - p_3) + \frac{u_3^2}{2} + g(z_4 - z_3) + R_{3,4} = 0$$

essendo  $u_4 = 0$ .

Sommando le precedenti e tenendo conto che, se si trascura la differenza di pressione atmosferica tra le quote  $z_1$  e  $z_4$ , e'  $p_1 = p_4$ , si ha:

$$v(p_2 - p_3) + \frac{u_2^2 - u_3^2}{2} + g(z_2 - z_1 + z_4 - z_3) + R_{1,2} + R_{3,4} = 0.$$

Se  $S_2 = S_3$ , e se e' trascurabile la differenza di quota tra le stesse sezioni, e' anche

$$u_2^2 - u_3^2 = 0$$

$$z_2 - z_1 + z_4 - z_3 \cong h$$

e la differenza di pressione  $p_3 - p_2$  che deve fornire la pompa puo' ricavarsi dalla:

$$v(p_3 - p_2) = g h + R_{tot}$$

avendo posto  $R_{tot} = R_{1,2} + R_{3,4}$ .

La relazione trovata mostra che la pompa deve essere in grado di fornire il lavoro necessario a compensare le perdite di carico del liquido durante il moto ed a fornire l'energia di posizione  $g h$ , in quanto il liquido stesso e' passato da una quota  $z_1$  ad una quota  $z_4$ .

E' da notare che, in generale, nella formula precedente il termine quantitativamente piu' importante e' rappresentato da  $g h$  mentre  $R_{tot}$  e' sempre notevolmente inferiore a questo. Ne consegue che in un impianto di sollevamento per un edificio, entro certi limiti, non ha importanza rilevante la scelta di un certo diametro del condotto piuttosto che un altro, scel-

ta da cui dipende appunto il valore di  $R_{tot}$  (vedi pagina 52).

**C) Calcolo della prevalenza di una pompa in circuito chiuso**

Se la pompa viene inserita in un circuito chiuso schematizzato in fig. 9, allora l'equazione di Bernoulli applicata tra le sezioni 1 e 2 diventa:

$$v(p_2 - p_1) + R_{1,2} = 0$$

avendo trascurato le differenze di quota tra le sezioni a valle e a monte della pompa e ammettendo che le velocità nelle due

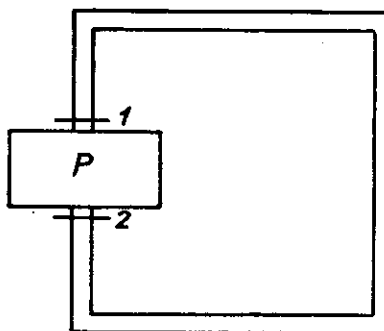


Fig. 9

sezioni siano uguali, se come spesso avviene i condotti a monte e a valle della pompa hanno le stesse sezioni. In questo caso la pompa deve sopperire alle sole perdite di carico che il fluido incontra nel suo moto entro i condotti. Queste perdite dipendono, per un certo fluido, dalla portata e dalle caratteristiche geometriche del condotto, secondo - come sarà mostrato(\*) - la:

(\*) Si veda il par. 10.

$$R = 2 f_F \frac{u^2}{D} L.$$

dove D ed L sono rispettivamente il diametro e la lunghezza del condotto.

Il valore delle perdite di carico, almeno di quelle ripartite, viene così a dipendere dalla quinta potenza del diametro stesso e di conseguenza la prevalenza della pompa è tanto maggiore quanto più piccola è la sezione dei tubi che si adottano nei circuiti. Viceversa maggiore è la sezione dei condotti e minore la perdita di carico e perciò la prevalenza, e di conseguenza la potenza installata, della pompa. Si noti come, a differenza del caso precedente, la scelta del diametro del condotto abbia un'influenza decisiva sul valore delle caratteristiche della pompa che viene inserita nel circuito e di conseguenza il costo d'impianto e di esercizio dipende in maniera essenziale da questa scelta.

#### D) Calcolo della prevalenza di un ventilatore

L'equazione di Bernoulli scritta, nel caso più generale per un fluido compressibile, assume la forma

$$\int_1^2 v dp + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + R = 0$$

e sotto tale forma andrebbe applicata nel caso particolare del moto di aria in un qualunque circuito aperto o chiuso.

Si abbia, infatti, un circuito di canali qualsiasi, in cui si muova una certa portata d'aria ed in cui sia inserito un ventilatore, quale può aversi ad esempio nel caso di un impianto di condizionamento d'aria.



In tal caso, considerata l'aria come un gas ideale si potrebbero scrivere le equazioni di stato dei gas ideali  $p v = R T$ ,  $dU = \gamma_v dT$  e l'equazione della trasformazione particolare che avviene durante il moto, ad esempio una politropica:

$$p v^m = \text{cost}$$

Si potrebbe così risolvere l'integrale:

$$\int_1^2 v \, dp = \frac{m}{m-1} p_1 V_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]$$

Tuttavia è bene notare che le differenze di pressione in gioco non superano in generale qualche centinaio di mm di colonna d'acqua rispetto alla pressione base atmosferica di  $\sim 10$  m di colonna d'acqua, vale a dire che la pressione tra le sezioni 1 e 2 prescelte non varia che di qualche per cento.

Sotto tale ipotesi è lecito ammettere che il volume specifico rimanga costante e scrivere quindi l'equazione di Bernoulli sotto la forma prima riportata, valida per i fluidi incompressibili, ciò che equivale a fermarsi al primo termine dello sviluppo in serie del termine  $\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}}$ .

Dato quindi il circuito schematicamente rappresentato in fig.10 con un canale di aspirazione dall'esterno, un condizionatore in cui sia in particolare installato un ventilatore, ed un canale di mandata in un ambiente in cui si vogliono controllare le condizioni termoigrometriche, si potrà scrivere, tra le sezioni  $S_1$  e  $S_2$

$$v(p_2 - p_1) + \frac{u_2^2}{2} + g(z_2 - z_1) + R_{12} = 0$$

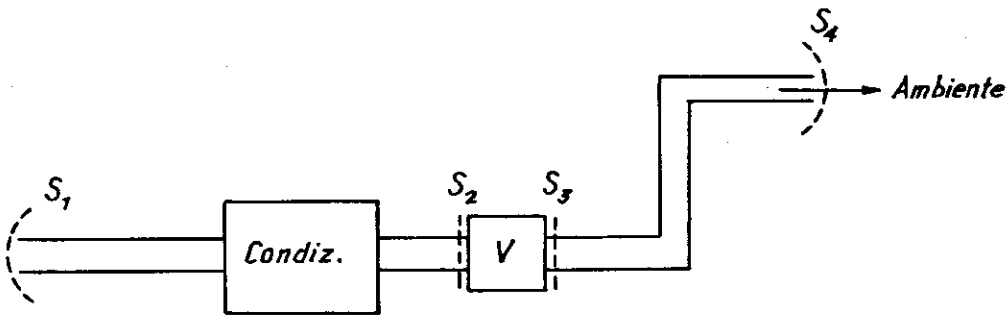


Fig. 10

avendo scelto la sezione  $S_1$  abbastanza lontana dall'imbocco del canale in modo tale da trascurarne la velocità  $u_1$ , e tra le sezioni  $S_3$  e  $S_4$ :

$$v(p_4 - p_3) - \frac{u_3^2}{2} + g(z_4 - z_3) + R_{34} = 0$$

Sommando si ottiene, poiché le pressioni nelle sezioni  $S_1$  e  $S_4$  sono uguali e pari a quella atmosferica  $p_a$  e la differenza di energia cinetica è in generale trascurabile:

$$v(p_2 - p_3) + gH + R = 0$$

dove si è posto  $R = R_{12} + R_{34}$ .

L'andamento delle pressioni lungo l'asse del canale è qualitativamente rappresentato in fig. 11.

Occorre tuttavia ricordare che  $p_3 - p_2$  rappresenta solamente qualche percento di  $p_a$ , mentre in figura tale differenza appare molto maggiore per comodità di rappresentazione.

A proposito del termine  $R$  va notato che, mentre nel caso

di un liquido le perdite di carico ripartite sono in generale molto maggiori di quelle concentrate (per cambiamenti di sezione o di direzione del condotto ecc.) e quindi di queste ultime si puo' tener conto, come si fa' normalmente nel calcolo della prevalenza di una pompa, aumentando di una certa percentuale, che rimane in generale sempre in limiti abbastanza ristretti, quelle ripartite, nel caso di condotte d'aria le perdite ripartite e concentrate sono dello stesso ordine di grandezza, anzi quelle concentrate sono, in generale, preponderanti.

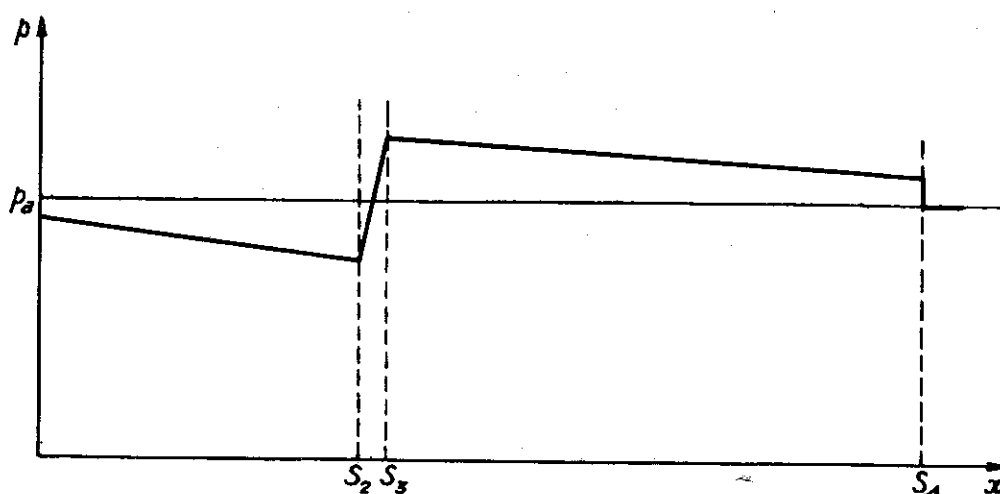


Fig. 11

E' necessario perciò, nel valutare il termine  $R$ , tenere separate le perdite ripartite da quelle concentrate, le quali d'altronde dipendono grandemente dalle caratteristiche geometriche e costruttive degli elementi particolari che le producono. Per questo nella fig. 11 più sopra riportata non sono indicate le perdite concentrate, altro che per quelle all'aspirazione e alla mandata nell'ambiente.

